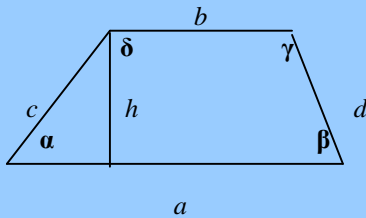


9.5. WŁASNOŚCI MIAROWE CZWOROKATÓW

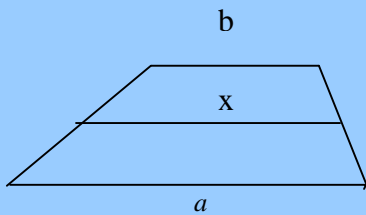
Trapez



w trapezie przynajmniej jedna para boków jest równoległa
 a, b – podstawy trapezu

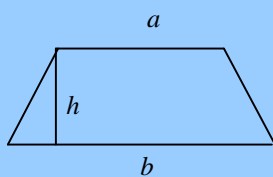
c, d – ramiona trapezu
 h – wysokość trapezu

$$\alpha + \delta = 180^\circ \quad \beta + \gamma = 180^\circ$$



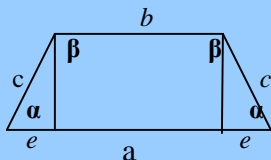
Odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw i

wyraża się wzorem $x = \frac{a+b}{2}$



Wzór na pole trapezu : $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$

Trapez równoramienny

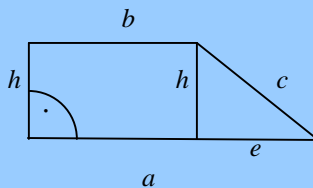


- kąty wewnętrzne trapezu równoramiennego przy tej samej podstawie są równe,
- przekątne trapezu równoramiennego są równe i dzielą się samym stosunku,

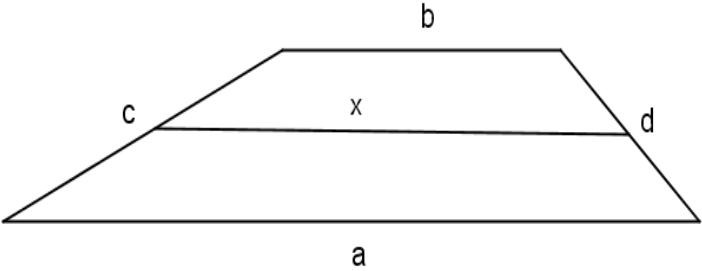
- wzór na e w trapezie równoramiennym: $e = \frac{a-b}{2}$

Trapez prostokątny

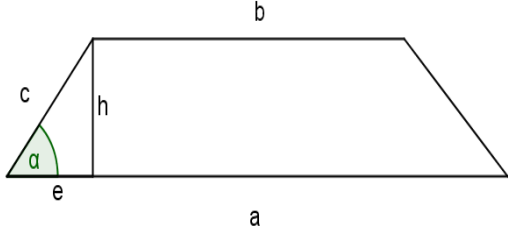
- wzór na e w trapezie prostokątnym : $e = a - b$

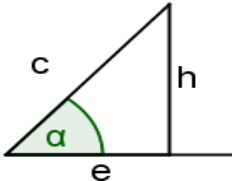


Przykład 9.5.1. Ramiona trapezu mają długości 4 i 8, a obwód trapezu jest równy 30. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.

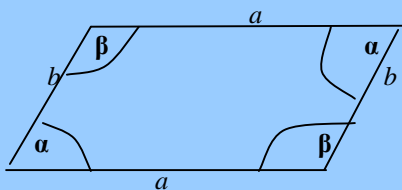
Rozwiązanie	Komentarz
 <p>Dane: $c = 8$ $d = 4$ $Ob = 30$</p> <p>Szukane: x</p> <p>Wzory: $x = \frac{a+b}{2}$ $Ob = a + b + c + d$</p>	Analiza zadania.
$Ob = a + b + c + d$ $30 = a + b + 8 + 4$ $30 = a + b + 12$ $a + b = 18$	Wykorzystując obwód, obliczamy sumę podstaw.
$x = \frac{a+b}{2} = \frac{18}{2} = 9$	Obliczamy x ze wzoru: $x = \frac{a+b}{2}$

Przykład 9.5.2. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma 16, ramię 6, a kąt ostry 60° . Oblicz pole trapezu.

Rozwiązanie	Komentarz
 <p>Dane: $a = 16$ $c = 6$ $\alpha = 60^\circ$</p> <p>Szukane: P</p> <p>Wzory: $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$</p>	Analiza zadania.

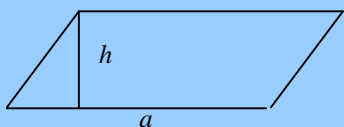
 $\sin \alpha = \frac{h}{c}$ $\sin 60^\circ = \frac{h}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6}$ $2h = 6\sqrt{3} / : 2$ $h = 3\sqrt{3}$	<p>Obliczmy h korzystając ze wzoru:</p> $\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{naprzeciw}} \alpha}{\text{przeciwprostokątna}}$
$\cos \alpha = \frac{e}{c}$ $\cos 60^\circ = \frac{e}{6}$ $\frac{1}{2} = \frac{e}{6}$ $2e = 6 / : 2$ $e = 3$	<p>Obliczmy e korzystając ze wzoru:</p> $\cos \alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{przy}} \alpha}{\text{przeciwprostokątna}}$
$3 = \frac{16-b}{2} / \cdot 2$ $6 = 16 - b$ $b = 16 - 6$ $b = 10$	<p>Obliczamy b wykorzystując wzór: $e = \frac{a-b}{2}$</p>
$P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{1}{2}(16+10) \cdot 3\sqrt{3} = 39\sqrt{3}$	<p>Obliczamy pole trapezu.</p>

Równoległobok



- w równoległoboku przeciwległe boki są równe i równoległe,
- w równoległoboku przeciwległe kąty są równe,
- w równoległoboku $\alpha + \beta = 180^\circ$
- w równoległoboku przekątne przecinają się w połowie

Wzory na pole równoległoboku:



$$P = a \cdot h$$



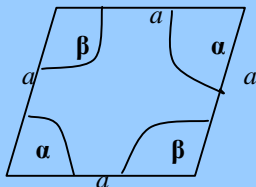
$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Przykład 9.5.3. Krótsza przekątna równoległoboku wynosi $2\sqrt{7}$ i tworzy z krótszym bokiem kąt prosty. Stosunek długości boków równoległoboku jest równy 3 : 4 . Oblicz pole i obwód równoległoboku.

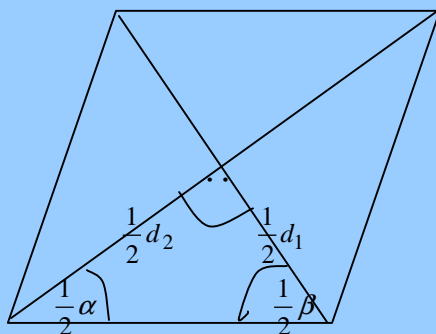
Rozwiązanie			Komentarz
			Analiza zadania.
Dane: $d = 2\sqrt{7}$ $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ $\alpha = 90^\circ$	Szukane: P, Ob	Wzory: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot d$ $Ob = 2a + 2b$	Pole równoległoboku możemy obliczyć wykorzystując fakt, że jest on zbudowany z dwóch przystających trójkątów prostokątnych.
$b^2 + d^2 = a^2$ $b^2 + 28 = a^2$			Wykorzystując twierdzenia Pitagorasa układamy równanie z niewiadomymi a i b .

$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ b^2 + 28 = a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = \frac{3}{4}a \\ \left(\frac{3}{4}a\right)^2 + 28 = a^2 \end{cases}$ $\frac{9}{16}a^2 - a^2 = -28$ $-\frac{7}{16}a^2 = -28 / : \left(-\frac{7}{16}\right)$ $a^2 = 64$ $a = 8$ $b = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$	<p>Budujemy układ równań z niewiadomymi a i b, który rozwiązujemy metodą podstawiania.</p>
$P = 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot d = 6 \cdot 8 = 48$	<p>Obliczamy pole równoległoboku.</p>
$Ob = 2a + 2b = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 28$	<p>Obliczamy obwód równoległoboku.</p>

Romb

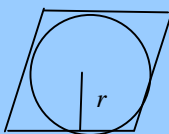


- w rombie wszystkie boki są równe,
- w rombie przeciwległe kąty są równe,
- w rombie $\alpha + \beta = 180^\circ$



Przekątne w rombie:

- dzielą się na połowę,
- przecina ją się pod kątem prostym,
- dzielą kąty wewnętrzne na połowę

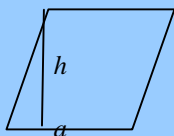


Okąg wpisany w romb:

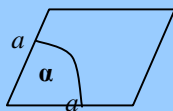
- środek okręgu wpisanego w romb jest punktem przecięcia przekątnych rombu
- wzór na promień okręgu wpisanego w romb

$$r = \frac{1}{2} h$$

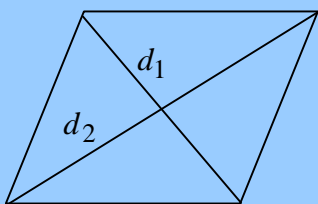
Wzory na pole rombu



$$P = a \cdot h$$

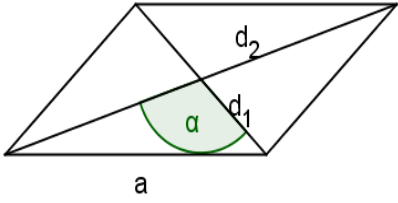


$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$



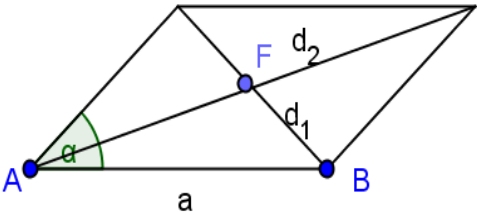
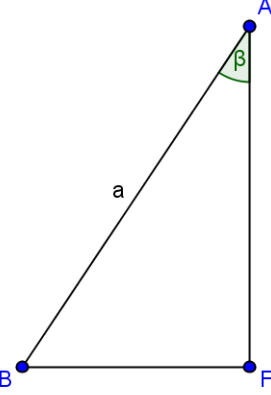
$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

Przykład 9.5.4. Jedna z przekątnych rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej.
Wyznacz stosunek obwodu rombu do sumy jego przekątnych.

Rozwiązanie	Komentarz
<div style="text-align: center;">  </div> <p>Dane: $d_2 = 2d_1$</p> <p>Szukane: $\frac{Ob}{d_1 + d_2}$</p> <p>Wzory: $Ob = 4a$</p>	<p>Analiza zadania.</p>
$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = a^2$ $\frac{1}{4}d_1^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 2d_1\right)^2 = a^2$ $\frac{1}{4}d_1^2 + d_1^2 = a^2$	<p>Przekątne w rombie są prostopadłe, zatem $\alpha = 90^\circ$</p> <p>Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa i wykonując odpowiednie podstawienie układamy równanie z niewiadomą d_1.</p>

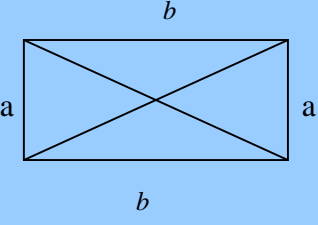
$\frac{5}{4}d_1^2 = a^2$ $a = \frac{\sqrt{5}}{2}d_1$	
$\frac{Ob}{d_1 + d_2} = \frac{4a}{d_1 + 2d_1} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}d_1}{3d_1} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$	Obliczamy stosunek obwodu rombu do sumy jego przekątnych.

Przykład 9.5.5. Oblicz pole rombu wiedząc, że krótsza przekątna ma długość 6 i kąt ostry rombu ma miarę 60°

Rozwiązanie	Komentarz
 <p>Dane: $d_1 = 6$ $\alpha = 60^\circ$</p> <p>Szukane: P</p> <p>Wzory: $P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$</p>	<p>Analiza zadania.</p>
	<p>Przekątne w rombie są prostopadłe, zatem trójkąt ABF jest prostokątny.</p> <p>Z własności rombu wynika również:</p> $\beta = \frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$ $ BF = \frac{1}{2}d_1$ $ AF = \frac{1}{2}d_2$
$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{1}{2}d_1}{\frac{1}{2}d_2}$ $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{d_1}{d_2}$	<p>Obliczamy d_2 wykorzystując wzór:</p> $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{przyprostokątna}_{\text{naprzeciw}} \alpha}{\text{przyprostokątna}_{\text{przy}} \alpha}$

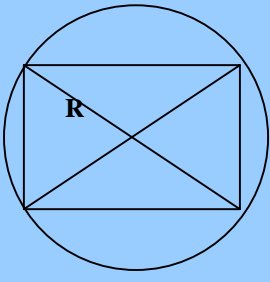
$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{d_2}$ $\sqrt{3}d_2 = 18/\cdot\sqrt{3}$ $3d_2 = 18\sqrt{3}/:3$ $d_2 = 6\sqrt{3}$	
$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$	Obliczamy pole rombu.

Prostokąt



- przekątne w prostokącie są równe i dzielą się na połowy

- wzór na pole prostokąta: $P = a \cdot b$

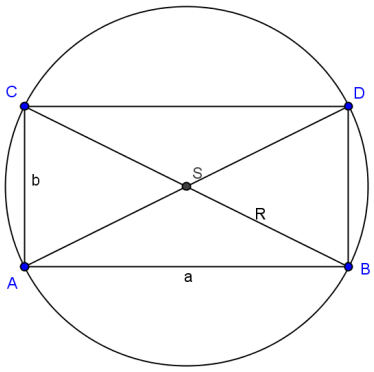


Okąg opisany na prostokącie:

- środkiem okręgu opisanego na prostokącie jest punkt przecięcia przekątnych prostokąta
- wzór na promień okręgu opisanego na prostokącie

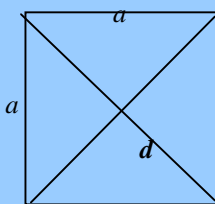
$$R = \frac{1}{2}d \quad d - \text{przekątna prostokąta}$$

Przykład 9.5.6. Prostokąt wpisany jest w okrąg o promieniu 20, stosunek długości jego boków jest równy 3 : 4 . Oblicz pole tego prostokąta.

Rozwiązanie	Komentarz
<div style="text-align: center;">  </div> <p>Dane: $R = 20$ $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$</p> <p>Szukane: P</p> <p>Wzory: $P = a \cdot b$</p>	Analiza zadania.

$a^2 + b^2 = (2R)^2$ $a^2 + b^2 = 1600$	<p>Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym. Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa dla tego trójkąta zapisujemy równanie z niewiadomymi a i b</p>
$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 1600 \end{cases}$ $\begin{cases} b = \frac{3}{4}a \\ a^2 + b^2 = 1600 \end{cases}$ $a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 1600$ $a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 1600$ $\frac{25}{16}a^2 = 1600$ $a^2 = 1024$ $a = 32$ $b = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$	<p>Zapisujemy układ równań z niewiadomymi a i b, który rozwiązujemy metodą podstawiania.</p>
$P = a \cdot b = 32 \cdot 24 = 768$	<p>Obliczmy pole prostokąta.</p>

Kwadrat



- przekątne kwadratu są równe, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy

- wzór na przekątną kwadratu: $d = a\sqrt{2}$

- wzór na pole kwadratu: $P = a^2$

Okrąg wpisany w kwadrat i okrąg opisany na kwadracie

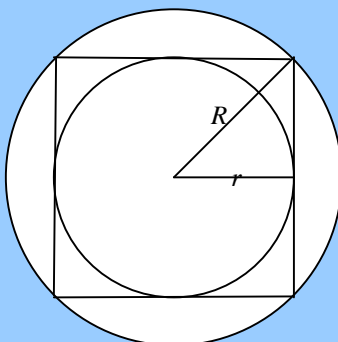
- punkt przecięcia przekątnych kwadratu jest środkiem okręgu wpisanego w kwadrat i środkiem okręgu opisanego na kwadracie.

- wzór na promień okręgu wpisanego w kwadrat :

$$r = \frac{1}{2}a$$

- wzór na promień okręgu opisanego na kwadracie:

$$R = \frac{1}{2}d$$



Przykład 9.5.7. Różnica między długością przekątnej i długością boku kwadratu wynosi 2 cm
Oblicz pole i obwód kwadratu

Rozwiązanie	Komentarz
Dane : $d - a = 2$ Szukane: P, Ob Wzory: $P = a^2$ $Ob = 4a$ $d = a\sqrt{2}$	Analiza zadania.
$d - a = 2$ $a\sqrt{2} - a = 2$ $a(\sqrt{2} - 1) = 2 / : (\sqrt{2} - 1)$ $a = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \cdot (\sqrt{2} + 1)$ $a = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 - 1} = 2\sqrt{2} + 2$	Układamy i rozwiązujemy równanie z niewiadomą a . Usuwamy niewymierność z mianownika
$P = a^2 = (2\sqrt{2} + 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 =$ $= 8 + 8\sqrt{2} + 4 = 12 + 8\sqrt{2}$	Obliczamy pole kwadratu. Do wykonania działania $(2\sqrt{2} + 2)^2$ wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$Ob = 4a = 4(2\sqrt{2} + 2) = 8\sqrt{2} + 8$	Obliczamy obwód kwadratu.

Przykład 9.5.8. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na kwadracie do promienia okręgu wpisanego w kwadrat.

Rozwiązanie	Komentarz
Szukane: $\frac{R}{r}$ Wzory: $R = \frac{1}{2}d$ $d = a\sqrt{2}$ $r = \frac{1}{2}a$	Analiza zadania.
$\frac{R}{r} = \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}a} = \frac{d}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$	Obliczamy stosunek promienia okręgu opisanego na kwadracie do promienia okręgu wpisanego w kwadrat

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 9.5.1. (3pkt) W trapezie prostokątnym wysokość $h = 8\text{cm}$, a kąt ostry $\alpha = 45^\circ$.
Oblicz obwód trapezu wiedząc, że krótsza podstawa $b = 10\text{cm}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości ramienia nieprostokątnego do podstaw.	1
2	Podanie długości dłuższej podstawy trapezu.	1
3	Podanie obwodu trapezu.	1

Ćwiczenie 9.5.2. (3pkt) Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, w którym podstawy mają długości 16cm i 6cm oraz ramię ma $5\sqrt{2}\text{cm}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości trapezu.	1
2	Podanie pola trapezu	1
3	Podanie obwodu trapezu.	1

Ćwiczenie 9.5.3. (3pkt) Oblicz długość krótszej przekątnej równoległoboku o bokach $3\sqrt{2}\text{cm}$ i 5cm , jeżeli kąt ostry ma miarę 45° .

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości równoległoboku opuszczonej na dłuższy bok.	1
2	Podanie długości odcinków, na które wysokość dzieli dłuższy bok.	1
3	Podanie długości krótszej przekątnej równoległoboku.	1

Ćwiczenie 9.5.4. (3pkt) Oblicz pole i obwód rombu wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten romb wynosi 4cm i kąt ostry tego rombu 30° .

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości rombu.	1
2	Podanie długości boku rombu.	1
3	Podanie pola rombu.	1

Ćwiczenie 9.5.5. (2pkt) Oblicz długości przekątnych rombu o kącie ostrym 60° i boku 10 cm .

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości krótszej przekątnej.	1
2	Podanie długości dłuższej przekątnej.	1

Ćwiczenie 9.5.6. (3pkt) Oblicz pole i obwód prostokąta wiedząc, że jego przekątna ma długość 5 cm , a jeden z boków jest dwa razy większy od drugiego.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości boków prostokąta.	1
2	Podanie pola prostokąta.	1
3	Podanie obwodu prostokąta.	1

Ćwiczenie 9.5.7. (3pkt) Oblicz pole i obwód kwadratu wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym kwadracie wynosi $4\sqrt{2}$ cm

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości boku kwadratu.	1
2	Podanie pola kwadratu.	1
3	Podanie obwodu kwadratu.	1